2.3.5 Stavová rovnice ideálního plynu

Předpoklady: 2301, 2303, 2304

Plyn nafoukaný do balónku se po čase dostane do rovnovážného stavu $\Rightarrow$ jeho stav určují stavové veličiny: p, T, V, n, ρ, m.

Jaký je mezi nimi vztah?

Rovnice pro tlak: $p = \frac{1}{3} N_v m_0 {v_k}^2$.

Dosadíme: $N_v = \frac{N}{V}$, $v_k^2 = \frac{3kT}{m_0}$.

$$p = \frac{1}{3}\frac{N}{V} \cdot m_0 \cdot \frac{3kT}{m_0}$$

$$p = \frac{kNT}{V}$$

- $pV = kNT$ **- 1. verze stavové rovnice ideálního plynu (přes počet molekul)**

Rozepíšeme si $N = n \cdot N_A$. (molární množství, Avogadrova konstanta)

$pV = nN_A kT$.

Označíme: $N_A k = R$ (molární plynová konstanta $R = 8,31\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$).

- $pV = nRT$ **- 2. verze stavové rovnice ideálního plynu (přes molární množství)**

Rozepíšeme si: $n = \frac{m}{M}$.

- $pV = \frac{m}{M} RT$ **- 3. verze stavové rovnice ideálního plynu (přes molární hmotnost)**

Vrátíme se k 2. verzi stavové rovnice: $pV = nRT \quad / : T$.

$$\frac{pV}{T} = nR$$

Pokud se nemění množství plynu, je pravá strana stále stejná $\Rightarrow$ musí být stejná i levá strana $\Rightarrow \frac{pV}{T} = \text{konstanta}$.

Při stavové změně ideálního plynu o stálém molárním množství se výraz $\frac{pV}{T}$ nemění. Pro dva různé stavy takového plynu platí: $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$ (stavová rovnice plynu o stálé hmotnosti).

Př. 1: Urči molární množství a počet molekul vodíku H_2 obsaženého v pouťovém balónku o objemu $V = 4\,\text{l}$ při teplotě $t = 30\,°\text{C}$ a tlaku $p = 130\,\text{kPa}$.

Zjišťujeme molární množství $\Rightarrow$ použijeme druhou verzi stavové rovnice: $pV = nRT$.

$V = 4\,\text{l} = 0{,}004\,\text{m}^3$, $t = 30\,°\text{C} = 303{,}15\,\text{K}$, $p = 130\,\text{kPa} = 130000\,\text{Pa}$, $n = ?$, $N = ?$

$pV = nRT$

$\frac{pV}{RT} = n$

$n = \frac{pV}{RT} = \frac{130000 \cdot 0{,}004}{8{,}31 \cdot 303{,}15}\,\text{mol} = 0{,}206\,\text{mol}$

$N = n \cdot N_A = 0{,}206 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} = 1{,}24 \cdot 10^{23}$

Pouťový balónek obsahuje za daných podmínek 0,206 molu vodíku, což představuje $1{,}24 \cdot 10^{23}$ částic.

Př. 2: Jak se změní objem balónku, když vystoupá do výšky 2000 m, kde je teplota $10\,°\text{C}$ a kvůli poklesu okolního tlaku se sníží i tlak v balónku na $100\,\text{kPa}$.

Porovnáváme dva stavy téhož plynu $\Rightarrow$ použijeme $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$.

$V_1 = 4\,\text{l} = 0{,}004\,\text{m}^3$, $t_1 = 30\,°\text{C} = 303{,}15\,\text{K}$, $p_1 = 130\,\text{kPa} = 130000\,\text{Pa}$, $t_2 = 10\,°\text{C} = 283{,}15\,\text{K}$, $p_2 = 100\,\text{kPa} = 100000\,\text{Pa}$, $V_2 = ?$

$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$

$\frac{p_1V_1T_2}{p_2T_1} = V_2$

$V_2 = \frac{p_1V_1T_2}{p_2T_1} = \frac{130000 \cdot 0{,}004 \cdot 283{,}15}{100000 \cdot 303{,}15}\,\text{m}^3 = 4{,}86 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 = 4{,}86\,\text{l}$

Objem balónku se zvětší na 4,86 l.

Př. 3: Teplota 1,5 kg metanu v uzavřené tlakové lahvi je $300\,°\text{C}$. Urči jeho tlak, pokud je objem lahve 50 l.

Použijeme 3. verzi stavové rovnice (obsahuje hmotnost, která je zadána): $pV = \frac{m}{M}RT$.

$V = 50\,\text{l} = 0{,}05\,\text{m}^3$, $t = 300\,°\text{C} = 573{,}15\,\text{K}$, $m = 1{,}5\,\text{kg}$, $p = ?$

Potřebujeme molární hmotnost metanu CH_4:

$M(CH_4) = M(C) + 4 \cdot M(H) = 12 + 4 \cdot 1\,\text{g} \cdot \text{mol}^{-1} = 16\,\text{g} \cdot \text{mol}^{-1} = 0{,}016\,\text{kg} \cdot \text{mol}^{-1}$.

$p = \frac{mRT}{MV} = \frac{1{,}5 \cdot 8{,}31 \cdot 573{,}15}{0{,}016 \cdot 0{,}05}\,\text{Pa} = 8930000\,\text{Pa} = 8{,}9\,\text{MPa}$

Metan v lahvi má tlak 8,9 MPa.

Poznámka: Předchozí příklad je značně umělý. Ve skutečnosti se plyny (například propan-butan) v tlakových lahvích vyskytují v kapalném stavu. Například nejmenší propan-butanová láhev obsahuje 2 kg kapalného plynu o hustotě kolem $500\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$. Její vnitřní objem je tedy kolem 4 l. Jak je možné, že je v lahvi propan-butan kapalný i při teplotě $20°\mathrm{C}$ si vysvětlíme později.

Př. 4: Urči objem jednoho molu plynu za normálních podmínek (molární objem).

Použijeme 1. verzi stavové rovnice (obsahuje zadaný počet částic): $pV = kNT$.

$t = 0°\mathrm{C} = 273{,}15\,\mathrm{K}$, $p = 1{,}013\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$, $N = 6{,}023\cdot 10^{23}$, $k = 1{,}38\cdot 10^{-23}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}$, $V = ?$

$pV = kNT$

$$V = \frac{kNT}{p} = \frac{1{,}38\cdot 10^{-23}\cdot 6{,}023\cdot 10^{23}\cdot 273{,}15}{1{,}013\cdot 10^5}\,\mathrm{m}^{-3} = 2{,}24\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^{-3} = 22{,}4\,\mathrm{l}$$

Molární objem plynu za normálních podmínek je 22,4 litru.

Př. 5: 35 litrů vzduchu v pneumatice osobního automobilu se při jízdě zahřeje na teplotu $60°\mathrm{C}$. Tlak v pneumatice během jízdy se rovná $250\,000\,\mathrm{Pa}$. Urči, jaký objem vzduchu o teplotě $20°\mathrm{C}$ a tlaku 100 000 Pa je nutné do pneumatiky nahustit.

Porovnáváme dva stavy téhož plynu $\Rightarrow$ použijeme $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$.

$t_1 = 20°\mathrm{C} = 293\,\mathrm{K}$, $p_1 = 100000\,\mathrm{Pa}$, $t_2 = 60°\mathrm{C} = 333\,\mathrm{K}$, $p_2 = 250000\,\mathrm{Pa}$, $V_2 = 35\,\mathrm{l}$, $V_1 = ?$

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$$

$$V_1 = \frac{p_2V_2T_1}{p_1T_2}$$

$$V_1 = \frac{p_2V_2T_1}{p_1T_2} = \frac{250000\cdot 0{,}035\cdot 293}{100000\cdot 333}\,\mathrm{l} = 77\,\mathrm{l}$$

V pneumatice je nahuštěno 77 litrů vzduchu o teplotě $20°\mathrm{C}$ a tlaku $100000\,\mathrm{Pa}$.

Př. 6: Vzduch v ucpané stříkačce stlačíme na jednu pětinu původního objemu. Během stlačování se teplota plynu zvýší o $10°\mathrm{C}$. Urči tlak vzduchu, pokud měl na začátku stlačování teplotu $20°\mathrm{C}$ a tlak 100000 Pa.

Porovnáváme dva stavy téhož plynu $\Rightarrow$ použijeme $\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$.

$t_1 = 20°\mathrm{C} = 293\,\mathrm{K}$, $p_1 = 100000\,\mathrm{Pa}$, $t_2 = 30°\mathrm{C} = 303\,\mathrm{K}$, $V_2 = \frac{V_1}{5}$, $p_2 = ?$

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2}$$

$$\frac{p_1V_1T_2}{V_2T_1} = p_2$$

$$p_2 = \frac{p_1V_1T_2}{V_2T_1} = \frac{100000\cdot V_1\cdot 303}{\frac{V_1}{5}\cdot 293} = \frac{100000\cdot 303\cdot 5}{293}\,\mathrm{Pa} = 517000\,\mathrm{Pa}$$

Stlačený vzduch ve stříkačce má tlak 517000 Pa.

Př. 7: Při nafukování kola je třeba stlačit pumpičku o objemu pístu 0,1 litru celkem šedesátkrát. Do pístu pumpičky se nasává vzduch o tlaku 100000 Pa a teplotě $20°\mathrm{C}$. Urči, jaká část vzduchu unikne mimo duši kola, pokud nafouknutá duše má objem 2,3 litru, tlak 1,8 atm a vzduch má ihned po napumpování teplotu $25°\mathrm{C}$.

Určíme molární množství:

- vzduchu nasátého do pumpičky,
- vzduchu v duši po napumpování.

Porovnáním získáme množství uniklého vzduchu.

Množství vzduchu nasátého do pumpičky:

$V = 60 \cdot 0{,}1\,\mathrm{l} = 6\,\mathrm{l} = 6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$, $p = 100000\,\mathrm{Pa}$, $t = 20°\mathrm{C} = 293\,\mathrm{K}$, $n = ?$

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad n = \frac{pV}{RT} = \frac{100000 \cdot 6 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 293}\,\mathrm{mol} = 0{,}25\,\mathrm{mol}$$

Množství vzduchu v napumpované duši:

$V = 2{,}3\,\mathrm{l} = 2{,}3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$, $p = 180000\,\mathrm{Pa}$, $t = 25°\mathrm{C} = 298\,\mathrm{K}$, $n = ?$

$$pV = nRT \quad \Rightarrow \quad n = \frac{pV}{RT} = \frac{180000 \cdot 2{,}3 \cdot 10^{-3}}{8{,}31 \cdot 298}\,\mathrm{mol} = 0{,}17\,\mathrm{mol}$$

Porovnání:

0,25 mol … 100%

0,17 mol … x%

$$\frac{x}{0{,}17} = \frac{100}{0{,}25} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{0{,}17}{0{,}25} \cdot 100\,\% = 68\%$$

Během pumpování unikla mimo duši přibližně třetina vzduchu nasátého do pumpičky.

Dodatek: Rozhodně není pravda, že veškerý vzduch, který se nedostal do duše unikl. Část vzduchu zůstává uvnitř šlaufku mezi koncem pístu a ventilkem. Vzduch začíná proudit do duše teprve v okamžiku, kdy je tlak ve šlaufku větší než v duši. Je tedy zřejmé, že s rostoucím tlakem se množství vzduchu, který napumpujeme do duše zmenšuje. Kvůli skutečnosti uvedené v předchozí větě existuje maximální tlak, na který můžeme duši napumpovat (jeho určení je pak docela zajímavým námětem na samostatnou práci).

Shrnutí: Stavové veličiny plynu jsou svázány stavovou rovnicí. Pro stálé množství ideálního plynu platí $\frac{pV}{T} = \mathrm{konstanta}$.